Şirince, Eylül 2011

Analiz Problemleri (Lebesgue Ölçümü ve İntegrasyon Teorisine Giriş)

Bu kısımdaki problemler için gereken alt-yapı bilgisi , *K.R. Stromberg: An Introduction to Classical Real Anaysis, Wadsworth Inc. California 1981,* 6. bölüm'ün ilk 10 alt-bölümünde (veya tabii ona eşdeğer herhangi bir kaynakta) verilmiştir. Zaten göreceğiniz gibi soruların çoğu da bu kitaptan alınmıştır.

1. Bazı temel ve işlevsel bilgiler elde etmek için aşağıdaki problemleri çözün.

K.R. Stromberg: An Introduction to Classical Real Anaysis, Wadsworth Inc. California 1981

Sayfa. 277 Alıştırma: 15
Sayfa. 278 Alıştırma: 19

2. Bu problemde sonlu kapalı aralıklarda tanımlanmış reel degerler alan fonksiyonlarla çalışacağız.

Önce böylesi bir fonksiyonun ne zaman Riemann integrallenebilir (R-I) olmasını hatırlayın.

Şimdi bu kavramı biraz genişleteceğiz. Kullanacağımız terminoloji'yi özetleyelim:

Parçalanış : Kapalı bir $[a,b]$ aralığı için $a = x_0 \leq x_1 \leq ..... \leq x_n = b$ olmak üzere $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n$ alt aralıklarınan oluşan
$\mathbb{P} = \{I_i\}_i$ kümesi.
İşaretlenmiş Parçalanış : Bir parçalanma $\mathbb{P}$ ve bunun her alt aralığından seçilmiş birer nokta (işaret) lardan oluşan $\widetilde{\mathbb{P}} = \{I_i \ , t_i \epsilon I_i\}_i$ kümesi.
İşaretlenmiş Parçalanışlar için Riemann-Toplamları : Bir $f : [a,b] \to (-\infty, \infty)$ fonksiyonu ve bir $\widetilde{\mathbb{P}} = \{I_i \ , t_i \epsilon I_i\}_i$, İP verildiğinde

$$\mathcal{R}\left(f, \widetilde{\mathbb{P}}\right) = \sum_i f(t_i) \ |I_i|$$

ifadesine f' in , $\widetilde{\mathbb{P}}$ İP' na bağlı Riemann-Toplamı diyelim.

Ayar fonksiyonları : $\sigma : [a,b] \to (0,\infty)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar.

Kapalı bir $[a,b]$ aralığı, bir $\widetilde{\mathbb{P}} = \{I_i \ , t_i \epsilon I_i\}_i$ işaretlenmiş parçalanma $\left(\dot{I}P\right)$ ve bir σ dağılım fonksiyonu verildiğinde eğer

$$I_i \subseteq [t_i - \sigma(t_i), t_i + \sigma(t_i)] \qquad , \ i = 1, 2...$$

koşul'u sağlanıyorsa $\widetilde{\mathbb{P}}$ işaretlenmiş parçalanmasına $\sigma - ince$ diyelim ve bunu $\widetilde{\mathbb{P}} \prec \sigma$ şeklinde gösterelim.

Tanım $f : [a,b] \to (-\infty, \infty)$ fonksiyonuna eğer,

$\exists\ A \epsilon \mathbb{R}$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists$ dağılım fonksiyonu σ_ϵ öyleki $\forall\ \widetilde{\mathbb{P}} \prec \sigma_\epsilon$ için, $\left|\mathcal{R}\left(f, \widetilde{\mathbb{P}}\right) - A\right| \leq \epsilon$

koşulu sağlanır ise $[a,b]$ üzerinde G-R integrallenebilinir ve A sayısına da f'in $[a,b]$ üzerindeki G-R integrali denir.

· Her Riemann integrallenebilir fonksiyonun G-R integrallenebilinir olduğunu ve integrallerin de aynı olduğunu gösterin.

· $[0,1]$ aralığındaki her irrasyonal sayıyı sıfıra,ve verilen bir x rasyonal sayısını da,eğer x'in indirgenmiş temsili $x = \frac{p}{q}$ ise, q ya götüren fonksiyonun G-R integrallenebilir olduğunu gösterin. Bu fonksiyon Riemann integrallenebilir mi ?

·Bir "integral" den beklediğiniz temel bazı özellikler sizce G-R integralleri için de geçerli mi? Bir iki örnek verebilirmisiniz?

· Eğer f , $[a,b]$ aralığı üzerinde G-R integrallenebilir ise her $a < c < b$ sayısı için f in $[a,c]$ kapalı aralığında da G-R integrallenebilir olduğunu gösterin. Buradan da f'in , $[a,b]$ nin her kapalı alt aralığında G-R integrallenebilir olduğu sonucuna varın.

(NOT: Koşuldaki A sayısını kestirmek yerine belki önce R-integraldeki gibi bir "Cauchy kriteri" geliştirmek isteyebilirsiniz)

3. K.R. Stromberg: An Introduction to Classical Real Anaysis, Wadsworth Inc. California 1981

Sayfa. 277 Alıştırma: 16

4. K.R. Stromberg: An Introduction to Classical Real Anaysis, Wadsworth Inc. California 1981

Sayfa. 314 Alıştırma: 28

5. $[0,1]$ aralığında hemem her yerde sonlu değerler alan (Lebesgue) ölçülebilir bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi verilsin. Aşağıdaki

$$\textit{hemen her } x \text{ için} \qquad \lim_n \frac{|f_n(x)|}{c_n} = 0$$

ifadesini gerçek kılan bir $(c_n)_n$ dizisinin varlığını gösterin.

Öneri: Her n için , $m\left(x : |f_n(x)| \geq N\right) \leq \frac{1}{2^n}$ koşulunu sağlayacak bir N tam sayısı bulun ve yukarıdaki problemi kullanın.

6. · Egorov ve Luzin teoremlerini hatırlayın (aksi söylenmedikçe daima $\mathbb{R}$ ve Lebesgue ölçümü için)

· Kapalı bir aralığın karakteristik fonksiyonuna hemen her yerde (h.h.y.) (Lebesgue ölçümüne göre) eşit bir sürekli fonksiyon bulabilir misiniz?

· Ölçülebilir fonksiyonlara sürekli fonksiyonlarla noktasal olarak hemen her yerde yaklaşılabileceğini gösterin.

· $[0,1]$ aralığındaki rasyonel sayıları bire, irrasyonel sayıları sıfıra götüren fonksiyonu D ile gösterelim. Aşağıdaki

$$D(x) = \lim_n \lim_m (\cos(2\pi n! x)^m \ , \quad \forall x \epsilon \, [0,1]$$

ifadesi D fonksiyonuna $[0,1]$ üzerinde sürekli fonksiyonlarla ikili limit kullanarak yaklaşılabileceğini söylemekte.

Ancak bu fonksiyona tek limit kullanarak sürekli fonksiyonlarla, *her yerde,* noktasal olarak yaklaşılamayacağını gösterin.

7. · Cantor kümesini ve özelliklerini hatırlayın.

· $[0,1]$ aralığında parçalı-lineer (grafiği doğru parçalarından oluşan) sürekli fonksiyonlardan oluşan bir dizi inşa edeceğiz:

Dizinin ilk elemanının grafiği için, aralığı 3 eşit parçaya bölün. Ortadaki $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ aralığında $\frac{1}{2}$,sıfır noktasında 0, bir noktasında 1 değerlerini alan ve grafiği ilk aralığın üzerinde $(0,0)$ noktasını $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ noktasına, son aralığın üzerinde de $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ noktasını $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ noktasına bağlayan doğru parçalarından oluşan f_1 sürekli parçalı-lineer fonksiyonu dizimizin ilk elemanı olacak. İkinci fonksiyon için $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ ve $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ aralıklarını üçer eşit parçaya bölün. Sıfır noktasında 0, bir noktasında 1 ve sırasıyla $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ aralıklarında $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ değerlerini alan parçalı lineer f_2 fonksiyonu ikinci elemanımız olacak (resim çizin) . Bu şekilde devam ederek bir $\{f_n\}$ dizi oluşturun ve bu dizinin $[0,1]$ aralığında bir f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösterin.

· Yukarıda elde edilen f fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde sürekli, azalmayan, hemen her yerde (Cantor kümesi dışında) türevlenebilen ve $[0,1]$ aralığını örten bir fonksiyon olduğunu gösterin. Hemen her yerde tanımlanmış türev fonksiyonu nasıl bir fonksiyondur?

8. $[0,1]$ aralığında ikinci türevi var olan reel değerli bir f fonksiyonu verildiğinde, $y \epsilon \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = y$ denkleminin çözümlerinin sayısını (bu sayı sonsuz da olabilir), $N_f(y)$ ile gösterelim. Başka bir deyişle

$$N_f(y) = \sharp\,(x : f(x) = y)\,.$$

olsun. N_f fonksiyonunun (Lebesgue) ölçülebilir olduğunu ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N_f(y)\, dm(y) = \int_0^1 \left| f'(t) \right| dt$$

eşitliğinin geçerli olduğunu gösterin.

Öneri: Her n için $[0,1]$ aralığını eşit uzunluklu 2^n tane aralığa bölerek
$$N_f^n(y) = \left\{ \begin{array}{c} f(x) = y \text{ denkleminin en az bir kökünü} \\ \text{içeren alt aralıkların sayısı} \end{array} \right\}$$

şeklinde oluşturulan fonksiyonlarla çalışmak yararlı olabilir.

Aşağıdaki iki problem de ilginç ve hoş ancak biraz uzun. İsterseniz birini seçin ve onun üzerinde çalışın.

9. K.R. Stromberg: An Introduction to Classical Real Anaysis, Wadsworth Inc. California 1981

Sayfa. 284 Alıştırma: 33
Sayfa. 316 Alıştırma: 35

10. K.R. Stromberg: An Introduction to Classical Real Anaysis, Wadsworth Inc. California 1981

Sayfa 312 Alıştırma:24

11. Varsayalım ki $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tüm reel x, y sayıları için $f(x+y) = f(x)+f(y)$ koşulunu sağlasın. Eğer f ölçülebilir bir fonksiyonsa bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sabit

sayısı için $f(x) = \alpha x$

olduğunu ve ölçülebilirlik şartını kaldırdığımızda verilen bu eşitliğin artık doğru olamayacağını gösteriniz.

12. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir ölçülebilir fonksiyon dizisi olsun. Eğer tüm $\delta > 0$ için

$$\lim_{m,n\to\infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R} : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \delta\}) = 0$$

ise $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ için ölçümde Cauchy denir.

a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir altdizisinin noktasal olarak f olarak adlandıracağımız bir fonksiyona yakınsadığını gösteriniz. Ayrıca $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin *ölçümde yakınsak* olduğunu yani aşağıdaki limitin gerçeklendiğini gösteriniz:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R} : |f(x) - f_n(x)| \geq \delta\}) = 0$$

b) $[0,1]$ kapalı aralığında hiçbir noktada yakınsak olmayan ancak ölçümde yakınsak olan bir fonksiyon dizisi oluşturunuz.

c) Varsayalım ki $X \subset \mathbb{R}$ ve $\lambda(X) < \infty$ olsun. Ayrıca $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X kümesi dışında 0 olan ölçülebilir fonksiyonlardan oluşan bir dizi olsun. Eğer hemen her yerde $f_n \to f$ ise, f_n dizisinin ölçümde f fonksiyonuna yakınsadığını gösteriniz.

d) Hemen her yerde yakınsaklığın ölçümde yakınsaklığı belirtmediği bir örnek türetin.

e) L_1 yakınsaklığının ölçümde yakınsaklığı belirttiğini ancak bunun tersinin doğru olmadığını gösteriniz.